Grothendieck ファイブレーション

Taichi Uemura (@t_uemura669101)

2017 年 12 月 17 日

概要

Grothendieck ファイブレーションを紹介する。

1 はじめに

この文書は Category Theory Advent Calendar 2017 の 17 日目の記事です。

Grothendieck ファイブレーション (Grothendieck fibration) は、端的に言えば圏の族のようなものです。もともとは Grothendieck が descent theory の文脈で導入したものですが [GR71]、述語論理や多相型理論の意味論でも重要な役割を果たします [Jac99]。参考文献としては、[Her93], [Str14], [Joh02, Part B] などがあります。

この記事では、 Grothendieck ファイブレーションを定義し (3 節)、それの性質の一つとして、ファイバー毎の極限と全圏の極限を比較します (4 節)。また、今回は Grothendieck ファイブレーション以外のファイブレーション概念は登場しないので、Grothendieck ファイブレーションのことを単にファイブレーションと呼びます。圏論の基本的な知識 (圏、関手、極限など) は仮定します。この記事では証明はほとんど書きません。

2 集合族

ファイブレーションを導入する前に、集合族についておさらいしましょう。

定義 1. 集合 X に対し、 X 上の <u>集合族</u> とは、関数 $A : X \to \mathbf{Set}$ のことである。X 上の集合族 A, B に対し、 A から B への <u>射</u> とは関数の族 $f : \prod_{x \in X}(A(x) \to B(x))$ のことである。X 上の集合族と集合族の射のなす圏を $\mathbf{Set}^X$ と書く。

集合 X 上の集合族と X への関数は同一視できます。

定理 2. 次の圏同値がある。

$$\mathbf{Set}^X \simeq \mathbf{Set}/X$$

証明. 集合族 $A : X \to \mathbf{Set}$ に対し、第一射影 $\sum_{x \in A} A(x) \to X$ を対応させる関手 $\mathbf{Set}^X \to \mathbf{Set}/X$ が圏同値を与える。 □

3 ファイブレーション

ファイブレーションとは端的に言えば圏の族のようなものです。まずは圏の族を定義してみましょう。

定義 3. $\mathcal{S}$ を圏とする。$\mathcal{S}$-indexed category とは pseudo-functor $\mathbb{E} : \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Cat}$ のことである。$\mathcal{S}$ の射 $f : I \to J$ に対し、$\mathbb{E}(f) : \mathbb{E}(J) \to \mathbb{E}(I)$ のことを f^* と書く。

Pseudo-functor は恒等射と射の合成を同型を除いて保つ関手のようなものですが、ここでは深入りはしません。気になる人は 2 圏の文献をあたるとよいでしょう [Bén67], [KS74], [Lac10]。

例 4. 集合 X に対して圏 $\mathbf{Set}/X$ を対応させることで $\mathbf{Set}$-indexed category $\mathbf{Set}/- : \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Cat}$ が定まる。関数 $f : X \to Y$ に対して、$f^* : \mathbf{Set}/Y \to \mathbf{Set}/X$ は引き戻しで定める。

例 5. 集合 X に対して圏 $\mathbf{Set}^X$ を対応させることで $\mathbf{Set}$-indexed category $\mathbf{Set}^- : \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Cat}$ が定ます。関数 $f : X \to Y$ に対して、$f^* : \mathbf{Set}^Y \to \mathbf{Set}^X$ は $f^*A(x) = A(f(x))$ で定める。

集合 X 上の集合族を基に X への関数を構成したように、$\mathcal{S}$ を圏として、$\mathcal{S}$-indexed category を基に $\mathcal{S}$ への関手を構成することができます。

定義 6. $\mathcal{S}$ を圏、$\mathbb{E} : \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Cat}$ を $\mathcal{S}$-indexed category とする。$\mathbb{E}$ の Grothendieck 構成 (Grothendieck construction) とは次のように定義される圏 $\int_{\mathcal{S}} \mathbb{E}$ と関手 $\pi : \int_{\mathcal{S}} \mathbb{E} \to \mathcal{S}$ の組である。

- $\int_{\mathcal{S}} \mathbb{E}$ の対象は $\mathcal{S}$ の対象 I と $\mathbb{E}(I)$ の対象 X の組 (I, X)
- $\int_{\mathcal{S}} \mathbb{E}$ の射 $(I, X) \to (J, Y)$ は $\mathcal{S}$ の射 $s : I \to J$ と $\mathbb{E}(I)$ の射 $f : X \to s^*Y$ の組 (s, f)
- 射 $(s, f) : (I, X) \to (J, Y)$ と $(t, g) : (J, Y) \to (K, Z)$ の合成は $t \circ s : I \to K$ と

$$X \xrightarrow{f} s^*Y \xrightarrow{s^*g} s^*t^*Z \xrightarrow{\cong} (t \circ s)^*Z$$

  の組
- (I, X) 上の恒等射は $\mathrm{id} : I \to I$ と $X \cong \mathrm{id}^*X$ の組
- $\pi : \int_{\mathcal{S}} \mathbb{E} \to \mathcal{S}$ は第一射影

逆に関手 $P : \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$-indexed category を構成できるかというと必ずしもそうではありません。Grothendieck 構成 $\pi : \int_{\mathcal{S}} \mathbb{E} \to \mathcal{S}$ は特別な性質を持ちます。

命題 7. $\int_{\mathcal{S}} \mathbb{E}$ の対象 (I, X) と $\mathcal{S}$ の射 $s : J \to I$ に対して、射 $(s, \mathrm{id}) : (J, s^*X) \to (I, X)$ は次

の性質を持つ。$\int_{\mathcal{S}} \mathbb{E}$ の対象 (K,Z) に対して、図式

$$\begin{tikzcd}
\int_{\mathcal{S}} \mathbb{E}((K,Z),(J,s^*X)) \arrow[r, "(s,\mathrm{id})_*"] \arrow[d, "\pi"'] & \int_{\mathcal{S}} \mathbb{E}((K,Z),(I,X)) \arrow[d, "\pi"] \\
\mathcal{S}(K,J) \arrow[r, "s_*"'] & \mathcal{S}(K,I)
\end{tikzcd}$$

は引き戻しである。

この $(s,\mathrm{id}) : (J,s^*X) \to (I,X)$ のような射を取れる関手をファイブレーションと定義します。

定義 8. $p : \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ を関手とする。$\mathcal{E}$ の射 $f : X \to Y$ が <u>cartesian</u> であるとは、任意の $\mathcal{E}$ の対象 Z に対し、図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(Z,X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{E}(Z,Y) \arrow[d, "p"] \\
\mathcal{B}(pZ,pX) \arrow[r, "(pf)_*"'] & \mathcal{B}(pZ,pY)
\end{tikzcd}$$

が引き戻しであることをいう。

定義 9. <u>ファイブレーション</u> とは関手 $p : \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ で次の性質を満たすもののことである。$\mathcal{E}$ の対象 X と $\mathcal{S}$ の射 $s : J \to pX$ に対し、 cartesian な射 $f : Y \to X$ で $pY = J$ かつ $pf = s$ となるものが存在する。このような射 f を X の s に沿った <u>cartesian lifting</u> と呼ぶ。Cartesian lifting は同型を除いて一意であり、$\bar{s}_X : s^*X \to X$ と書く。

Cartesian 射の定義は標準的なもの [Jac99] とは異なる表現をしていますが、実質同じです。

いくつか例を見てみましょう。

例 10. 命題 7 より、$\mathcal{S}$-indexed category $\mathbb{E}$ の Grothendieck 構成 $\pi : \int_{\mathcal{S}} \mathbb{E} \to \mathcal{S}$ はファイブレーションである。

例 11. $\mathbf{2}$ を 2 つの対象 $0, 1$ と射 $0 \to 1$ で生成される圏とする。包含関手 $\{1\} \to \mathbf{2}$ はファイブレーションではない。

例 12. $\mathcal{S}$ を圏とする。 Codomain 関手 $\mathrm{cod} : \mathcal{S}^{\to} \to \mathcal{S}$ を考える。

1. $\mathcal{S}^{\to}$ の射 $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ I \arrow[r, "s"'] & J \end{tikzcd}$ が cod について cartesian であることと、この図式が引き戻しであることが同値である。
2. cod がファイブレーション であることと $\mathcal{S}$ が引き戻しを持つことは同値である。

Indexed category からファイブレーションを構成できるわけですが、逆にファイブレーションから indexed category を作ってみましょう。

定義 13. $p : \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ をファイブレーションとする。$\mathcal{S}$ の対象 I に対し、 $\mathcal{E}_I$ を $pX = I$ となる対象 X からなる $\mathcal{E}$ の充満部分圏とし、 p の I での ファイバー (fibre) と呼ぶ。また、$\mathcal{E}$ のことを p の 全圏 (total category) という。

命題 14. $p : \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ をファイブレーションとする。$\mathcal{S}$ の射 $s : I \to J$ と $\mathcal{E}_J$ の対象 X に対し、*cartesian lifting* $\bar{s}_X : s^*X \to X$ を 選択 することで関手 $s^* : \mathcal{E}_J \to \mathcal{E}_I$ が定まる。これにより $\mathcal{S}$*-indexed category* $I \mapsto \mathcal{E}_I$ を得る。

Indexed category からファイブレーションの構成と、ファイブレーションから indexed category の構成はだいたい互いに逆の構成です。より正確な意味は、適切に $\mathcal{S}$-indexed category の 2 圏と $\mathcal{S}$ 上のファイブレーションの 2 圏を定めるとこれらの構成が 2 圏の同値を与えるということです。

4 Fibred Limits

ファイブレーションはある意味で圏の族なので、ファイバー毎の性質というのが考えられます。ここでは、ファイバー毎の極限を考え、全圏の極限との関係を示します。

簡単のため、二項直積のみを考えますが、一般の極限についても同様のことが成り立ちます。

定義 15. $p : \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ をファイブレーションとする。次を満たすとき、 p は ファイバー二項直積 (fibred binary product) を持つという。

1. 各ファイバー $\mathcal{E}_I$ が二項直積を持つ。
2. 次の意味で cartesian lifting が二項直積を保つ。$\mathcal{S}$ の射 $s : I \to J$ と $\mathcal{E}_J$ の対象 X, Y に対し、$s^*(X \times Y)$ は s^*X と s^*Y の $\mathcal{E}_J$ での直積である。

定理 16. $p : \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ をファイブレーションとする。$\mathcal{S}$ が二項直積を持つとき、次は同値である。

1. p がファイバー二項直積を持つ。
2. $\mathcal{E}$ が二項直積を持ち、 p は二項直積を保つ。

これらの同値は直接示してもそんなに難しくないのですが、ここではファイバー二項直積と全圏での二項直積の中間概念として、相対二項直積 (relative binary product) を導入します。

定義 17. $p : \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ をファイブレーション、X, Y を $\mathcal{E}$ の対象とする。$\mathcal{E}$ の対象 P と射 $x : P \to X$, $y : P \to Y$ が X と Y の p-二項直積 であるとは、次を満たすことである。任意の $\mathcal{E}$ の対象 Z に対して、図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(Z,P) \arrow[r, "\langle x_*, y_* \rangle"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{E}(Z,X) \times \mathcal{E}(Z,Y) \arrow[d, "p \times p"] \\
\mathcal{B}(pZ,pP) \arrow[r, "\langle (px)_*, (py)_* \rangle"'] & \mathcal{B}(pZ,pX) \times \mathcal{B}(pZ,pY)
\end{tikzcd}$$

が引き戻しである。

定義 18. ファイブレーション $p:\mathcal{E}\to\mathcal{S}$ が相対二項直積を持つ とは、任意の $\mathcal{E}$ の対象 X,Y と $\mathcal{S}$ の射 $s:I\to pX, t:I\to pY$ に対し、X と Y の p-二項直積 $x:P\to X, y:P\to Y$ で $pP=I, px=s, py=t$ を満たすものが存在することである。

補題 19. ファイブレーション $p:\mathcal{E}\to\mathcal{S}$ に対し、次は同値である。

1. p がファイバー二項直積を持つ。
2. p が相対二項直積を持つ。

証明. 簡単。 □

補題 20. $p:\mathcal{E}\to\mathcal{S}$ をファイブレーションとする。$\mathcal{S}$ が二項直積を持つとき、次は同値である。

1. p が相対二項直積を持つ。
2. $\mathcal{E}$ が二項直積を持ち、 p は二項直積を保つ。

証明. 簡単。 □

定理 *16* の証明. 補題 19, 20 による。 □

参考文献

[Bén67] Jean Bénabou. Introduction to bicategories. In Reports of the Midwest Category Seminar, volume 47 of Lecture Notes in Mathematics, chapter 1, pages 1–77. Springer Berlin Heidelberg, 1967. doi:10.1007/bfb0074299.

[GR71] A. Grothendieck and M Raynaud. Revêtements étales et groupe fondamental, volume 224 of Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1971. arXiv:math.AG/0206203v2.

[Her93] C. Hermida. Fibrations, Logical Predicates and Indeterminates. PhD thesis, University of Edinburgh, 1993.

[Jac99] Bart Jacobs. Categorical Logic and Type Theory. Elsevier Science, 1st edition, December 1999.

[Joh02] Peter T. Johnstone. Sketches of an Elephant : A Topos Theory Compendium Volume 1, volume 43 of Oxford Logic Guides. Oxford University Press, 2002.

[KS74] G. M. Kelly and Ross Street. Review of the elements of 2-categories. In Gregory M. Kelly, editor, Category Seminar: Proceedings Sydney Category Theory Seminar 1972/1973, pages 75–103. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1974. doi:10.1007/BFb0063101.

[Lac10] Stephen Lack. A 2-Categories Companion. In John C. Baez and J. Peter May, editors, Towards Higher Categories, volume 152 of The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, chapter 4, pages 105–191. Springer New York, New York, NY, 2010. arXiv:math/0702535v1, doi:10.1007/978-1-4419-1524-5_4.

[Str14] Thomas Streicher. Fibred Categories à la Jean Bénabou. 2014. URL: http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~streicher/FIBR/FibLec.pdf.