Homotopy Type Theory と Cubical Type Theory

上村 太一 (名古屋大学)

2025 年 3 月 21 日
東北大学 コンピュータサイエンス研究会

Homotopy Type Theory (HoTT)

(依存) 型理論で、Univalence Axiom を満たし Higher Inductive Types を持つもの。

Univalence Axiom　型 A, B に対し

$$(A \equiv B) \simeq (A \simeq B).$$

Higher Inductive Types (HITs)　商、自由代数、存在量化 (∃)、余極限など。

Cubical Type Theory

HoTT の「実装」の一つ。

- Univalence Axiom を証明可能 (Cohen et al. 2018)。
- 一般の HITs のスキーマ (Coquand et al. 2018)。
- Canonicity (Huber 2019), e.g. $\vdash t : \mathsf{Bool}$ なら $\vdash t = \mathsf{true}$ または $\vdash t = \mathsf{false}$.
- Normalization (Sterling and Angiuli 2021).
- Coinductive types も扱い易くなる (Vezzosi 2017)。

講演の内容

HoTT や Cubical Type Theory に親しむ。

1. HoTT のアイディアの紹介。なぜ HoTT Book[1]の定式化がだめか。
2. Cubical Type Theory の紹介。Cubical Type Theory の構成要素を「見たことがある」状態になるのが目的。

前提知識

- Agda や Rocq (旧 Coq) などで、依存型を眺めたことがある程度を仮定。今回は Agda っぽい構文を使う。
- ホモトピー論や (∞-) 圏論は (技術的には) 要らない。

[1] The Univalent Foundations Program (2013). *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study. URL: http://homotopytypetheory.org/book/

Part I

Homotopy Type Theory

HoTT のアイディア

- $a \equiv b$ は a と b の同一視のなす型。
- あらゆる構成が同一視で不変。例えば

$$\mathsf{cong} : (f : A \to B)\{x_1\ x_2 : A\} \to x_1 \equiv x_2 \to f\ x_1 \equiv f\ x_2$$
$$\mathsf{transport} : A \equiv B \to A \to B$$

  のような関数を構成可能。
- Univalence $(A \equiv B) \simeq (A \simeq B)$ より、あらゆる構成は型の同値で不変。
- HITs は同一視の構成子も許すデータ型。

Univalence と Representation independence

インターフェースの同値な実装は同一。Univalence はこの原理を内面化する (Angiuli, Cavallo, et al. 2020)。例えば queue 構造の型

$$\begin{aligned} &\mathsf{QueueStr}\ A \\ &= (X : \mathsf{Type}) \times X \times (A \to X \to X) \times (X \to \mathsf{Maybe}\ (X \times A)) \times \dots \end{aligned}$$

と queue 構造の同値の型

$$\mathsf{QueueEqv} : \mathsf{QueueStr}\ A \to \mathsf{QueueStr}\ A \to \mathsf{Type}$$

を適切に (演算を保つ同値として) 定義すれば

$$(Q \equiv R) \simeq \mathsf{QueueEqv}\ Q\ R$$

が導かれる。

HIT の例

A : Type に対して、FinSet A : Type は次の構成子を持つ HIT (Basold et al. 2017).

$$
\begin{aligned}
&[\_] : A \to \mathsf{FinSet}\ A \\
&\emptyset : \mathsf{FinSet}\ A \\
&(\_ \cup \_) : \mathsf{FinSet}\ A \to \mathsf{FinSet}\ A \to \mathsf{FinSet}\ A \\
&\mathsf{assoc} : (x_1\ x_2\ x_3 : \mathsf{FinSet}\ A) \to x_1 \cup (x_2 \cup x_3) \equiv (x_1 \cup x_2) \cup x_3 \\
&\mathsf{unitl} : (x : \mathsf{FinSet}\ A) \to \emptyset \cup x \equiv x \\
&\mathsf{unitr} : (x : \mathsf{FinSet}\ A) \to x \cup \emptyset \equiv x \\
&\mathsf{com} : (x_1\ x_2 : \mathsf{FinSet}\ A) \to x_1 \cup x_2 \equiv x_2 \cup x_1 \\
&\mathsf{idem} : (x : \mathsf{FinSet}\ A) \to x \cup x \equiv x \\
&\mathsf{squash} : (x_1\ x_2 : \mathsf{FinSet}\ A)(p_1\ p_2 : x_1 \equiv x_2) \to p_1 \equiv p_2
\end{aligned}
$$

Identity types

同一視の型 $a \equiv b$ としては、HoTT Book では Martin-Löf 型理論の identity type を使っていた。A : Type と $a : A$ に対して、

$$(a \equiv \_) : A \to \mathrm{Type}$$

は次の構成子を持つデータ型 (の族)。

$$\mathrm{refl} : a \equiv a$$

Identity types

パターンマッチ。

$$
\begin{aligned}
&(\_)^{-1} : \{x_1\ x_2 : A\} \to x_1 \equiv x_2 \to x_2 \equiv x_1 \\
&\mathsf{refl}^{-1} = \mathsf{refl} \\
&(\_ \cdot \_) : \{x_1\ x_2\ x_3 : A\} \to x_2 \equiv x_3 \to x_1 \equiv x_2 \to x_1 \equiv x_3 \\
&q \cdot \mathsf{refl} = q \\
&\mathsf{cong} : (f : A \to B)\{x_1\ x_2 : A\} \to x_1 \equiv x_2 \to f\ x_1 \equiv f\ x_2 \\
&\mathsf{cong}\ f\ \mathsf{refl} = \mathsf{refl} \\
&\mathsf{transport} : \{A\ B : \mathsf{Type}\} \to A \equiv B \to A \to B \\
&\mathsf{transport}\ \mathsf{refl}\ x = x
\end{aligned}
$$

Identity types を使うことの問題点

Univalence や HITs は refl 以外の同一視を作る。例えば $\neg : \mathsf{Bool} \simeq \mathsf{Bool}$ から Univalence より何らかの $p : \mathsf{Bool} \equiv \mathsf{Bool}$ を得る。

問題

$$\mathsf{transport}\ p\ \mathsf{true} : \mathsf{Bool}$$

は false に簡約されるか、あるいはそうなるように Univalence を実装できるか。

$(a \equiv \_)$ は本来 refl しか要素を構成する方法がないデータ型なので、refl 以外の $(a \equiv \_)$ の要素には簡約規則はないし、簡約規則を追加する正当性も不明。結果 canonicity のような性質が崩れる。

Brunerie number

Brunerie (2016) は HoTT で次を示した。

定理 (Brunerie)

ある $n : \mathbb{Z}$ が存在して $\pi_4(\mathbb{S}^3) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Canonicity を満たす型理論で形式化すればこの n—Brunerie number と呼ばれる—を計算できるはず (古典的なホモトピー論の結果では $n = 2$)。

Part II

Cubical Type Theory

Cubical Type Theory

アイディア

$a \equiv b$ を identity type ではなく「単位区間 $[0,1]$ からの関数のなす空間」のようなものとして導入する。

- Univalence (の一部) $(A \simeq B) \to (A \equiv B)$ は型構成子 $(A \simeq B) \to [0,1] \to \mathsf{Type}$ を追加するような形になる。
- FinSet A の構成子 unitl : $(x : \mathsf{FinSet}\ A) \to \emptyset \cup x \equiv x$ は $(x : \mathsf{FinSet}\ A) \to [0,1] \to \mathsf{FinSet}\ A$ という「普通の」構成子になる。
- さらに coinductive types も扱い易くなる。

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Cubical Type Theory のバリエーション

大きく二つ。

- CCHM (Cohen–Coquand–Huber–Mörtberg) Cubical Type Theory (Cohen et al. 2018)
- Cartesian Cubical Type Theory (Angiuli, Brunerie, et al. 2019)

これらの中でもプリミティブの選び方でさらにバリエーションがある。
今回は CCHM Cubical Type Theory の一つで (Coquand et al. 2018) で提案されたものを解説する。Cubical Agda の実装 (Vezzosi et al. 2019) はこれに近い。

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

The Brunerie Number Is -2

Ljungström and Mörtberg (2023) は Cubical Agda を使って Brunerie number が

$$-2$$

であることを計算するのに成功した。(Brunerie (2016) の頃にも実験的な Cubical Type Theory の実装はあったが計算は終わらなかった。Cubical Agda の実装の効率は良いが、Ljungström and Mörtberg が成功したのは証明自体を改善したという点も大きい。)

Interval

Cubical Type Theory には interval $\mathbb{I}$ が組込まれている。

- $\mathbb{I}$ は型ではないが $\mathbb{I}$ の要素 $r : \mathbb{I}$ の概念がある。
- $\mathbb{I}$ の変数 $i : \mathbb{I}$ を使える。
- 定数 $0 : \mathbb{I}$ と $1 : \mathbb{I}$.
- De Morgan 代数構造

$$\frac{\Gamma \vdash r_1 : \mathbb{I} \qquad \Gamma \vdash r_2 : \mathbb{I}}{\Gamma \vdash r_1 \wedge r_2 : \mathbb{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash r_1 : \mathbb{I} \qquad \Gamma \vdash r_2 : \mathbb{I}}{\Gamma \vdash r_1 \vee r_2 : \mathbb{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash r : \mathbb{I}}{\Gamma \vdash \sim r : \mathbb{I}}$$

Cubes

$$\vdash a : A \qquad a$$

$$i : \mathbb{I} \vdash a : A \qquad a0 \xrightarrow{a} a1$$

$$i : \mathbb{I}, j : \mathbb{I} \vdash a : A \qquad \begin{tikzcd} a01 \arrow[r, "ai1"] & a11 \\ a00 \arrow[u, "a0j"] \arrow[r, "ai0"'] \arrow[ur, phantom, "a"] & a10 \arrow[u, "a1j"'] \end{tikzcd}$$

$$i : \mathbb{I}, j : \mathbb{I}, k : \mathbb{I} \vdash a : A$$ **(適当な立方体)**

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

同一視の概念

アイディア

$i : \mathbb{I} \vdash a : A$ を $a[i := 0] : A$ と $a[i := 1] : A$ の**同一視**だと思いたい。

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Homogeneous composition

同一視は合成できてほしい。あるいは、同一視という概念自体が同一視で不変であるべき。

$$\begin{tikzcd} a01 \arrow[r, "ai1"] & a11 \\ a00 \arrow[u, "a0j"] \arrow[r, "ai0"'] & a10 \arrow[u, dotted, "?"'] \end{tikzcd}$$

合成演算は $i = 0$ での値 $a0j$ と j 方向の「境界」$(ai0, ai1)$ のデータから $i = 1$ での値を構成するもの。

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Face lattice

「境界」のデータを指定するため face lattice というものを導入する。

- $\mathbb{F}$ は $(r = 0)$ と $(r = 1)$ で生成される分配束。

$$\frac{\Gamma \vdash r : \mathbb{I}}{\Gamma \vdash (r = 0) : \mathbb{F}} \qquad \frac{\Gamma \vdash r : \mathbb{I}}{\Gamma \vdash (r = 1) : \mathbb{F}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \bot : \mathbb{F}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi : \mathbb{F} \qquad \Gamma \vdash \psi : \mathbb{F}}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi : \mathbb{F}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top : \mathbb{F}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi : \mathbb{F} \qquad \Gamma \vdash \psi : \mathbb{F}}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi : \mathbb{F}}$$

- $\Gamma \vdash \varphi : \mathbb{F}$ に対して制限された文脈 Γ, φ を作れる。

導入

Interval

Homogeneous composition

Transport

Path types

Glue type

HITs

Coinductive types

まとめ

References

hcomp と transp の計算

境界

$$i : \mathbb{I}, j : \mathbb{I}, (j = 0) \vee (j = 1) \vdash a : A$$

$$\begin{array}{ccc} a01 & \xrightarrow{ai1} & a11 \\ & & \\ a00 & \xrightarrow[ai0]{} & a10 \end{array}$$

$$i : \mathbb{I}, j : \mathbb{I}, (i = 0) \vee (i = 1) \vdash a : A$$

$$\begin{tikzcd} a01 & a11 \\ a00 \arrow[u, "a0j"] & a10 \arrow[u, "a1j"'] \end{tikzcd}$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Homogeneous composition

次のプリミティヴを追加する。

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathsf{Type} \quad \Gamma \vdash \varphi : \mathbb{F} \qquad \Gamma, \varphi, i : \mathbb{I} \vdash u : A \qquad \Gamma \vdash a_0 : A \qquad \Gamma, \varphi \vdash a_0 = u[i := 0]}{\Gamma \vdash \mathsf{hcomp}(A, \varphi, (i)\, u, a_0) : A}$$

$$\mathsf{hcomp}(A, \top, (i)\, u, u[i := 0]) = u[i := 1]$$

ここで $(i)\, u$ は i を束縛する。

Homogeneous composition

例

$$\frac{\vdash A : \mathsf{Type} \qquad j : \mathbb{I}, (j = 0) \vee (j = 1), i : \mathbb{I} \vdash u : A \qquad j : \mathbb{I} \vdash a_0 : A \qquad j : \mathbb{I}, (j = 0) \vee (j = 1) \vdash a_0 = u[i := 0]}{j : \mathbb{I} \vdash \mathsf{hcomp}(A, (j = 0) \vee (j = 1), (i)\ u, a_0) : A}$$

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "u"] & \bullet \\
\bullet \arrow[u, "a_0"] \arrow[r, "u"'] & \bullet \arrow[u, dotted, "\mathsf{hcomp}"']
\end{tikzcd}$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Transport

アイディア

$i : \mathbb{I} \vdash A : \mathrm{Type}$ は型 $A[i := 0]$ と $A[i := 1]$ の同一視なので $A[i := 0]$ の要素を $A[i := 1]$ に送れてほしい。

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Generalized transport

ややー般的な形のプリミティヴを導入する。

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi : \mathbb{F} \qquad \Gamma \vdash a_0 : A[i := 0] \qquad \begin{array}{c}\Gamma, i : \mathbb{I} \vdash A : \mathsf{Type} \\ \Gamma, \varphi, i : \mathbb{I} \vdash A = A[i := 0]\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{transp}((i)\ A, \varphi, a_0) : A[i := 1]}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathsf{Type} \qquad \Gamma \vdash a_0 : A}{\Gamma \vdash \mathsf{transp}((\_)\ A, \top, a_0) = a_0}$$

つまり、$A[i := 0]$ から $A[i := 1]$ への関数だが、φ に制限すると恒等関数であるもの。

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Generalized transport

例

$$\frac{\Gamma, i : \mathbb{I} \vdash A : \mathsf{Type} \qquad \Gamma \vdash a_0 : A[i := 0]}{\Gamma \vdash \mathsf{transp}((i)\, A, \bot, a_0) : A[i := 1]}$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

hcomp と transp の計算規則

妙なプリミティヴを追加したのでそれについての計算規則を定めたい。

- hcomp$(A, \varphi, (i)\ u, a_0)$ と transp$((i)\ A, \varphi, a_0)$ は型 A についての場合分けで定義される。
- 型構成子を追加する際には通常の規則に加えて hcomp と transp についての規則も加える。
- 具体的な hcomp と transp の計算規則は今回は省略 (本当に技術的なので)。

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

型構成子

いつもの型構成子を導入する。

(依存) 関数型 $(x : A) \to B\ x$, $\lambda x.b$, $f\ a$, $(\lambda x.b)\ a = b[x := a]$, $f = \lambda x.f\ x$, hcomp の計算規則、transp の計算規則

(依存) 対型 $(x : A) \times B\ x$, $\langle a, b \rangle$, $c.1$, $c.2$, $\langle a, b \rangle.1 = a$, $\langle a, b \rangle.2 = b$, $c = \langle c.1, c.2 \rangle$, hcomp の計算規則、transp の計算規則

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Path types

同一視 $i : \mathbb{I} \vdash a : A$ を内面化する型を導入する。

$$\frac{\Gamma, i : \mathbb{I} \vdash A : \mathsf{Type} \qquad \Gamma \vdash a_0 : A[i := 0] \qquad \Gamma \vdash a_1 : A[i := 1]}{\Gamma \vdash \mathsf{Path}((i)\ A, a_0, a_1) : \mathsf{Type}}$$

$$\frac{\Gamma, i : \mathbb{I} \vdash a : A}{\Gamma \vdash \langle i \rangle\ a : \mathsf{Path}((i)\ A, a[i := 0], a[i := 1])}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : \mathsf{Path}((i)\ A, a_0, a_1) \qquad \Gamma \vdash r : \mathbb{I}}{\Gamma \vdash p\ r : A[i := r]} \qquad p\ 0 = a_0 \qquad p\ 1 = a_1$$

$(\langle i \rangle\ a)\ r = a[i := r]$ $\qquad$ $p = \langle i \rangle\ p\ i$ $\qquad$ hcomp の $\qquad$ transp の

Path types

要するに端点の条件の付いた関数の型。

$$\frac{\Gamma \vdash p : \mathsf{Path}((i)\ A, a_0, a_1)}{\Gamma, i : \mathbb{I} \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash a[i := 0] = a_0 \qquad \Gamma \vdash a[i := 1] = a_1}$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Path types

定義

$A : \mathsf{Type},\ a_0 : A,\ a_1 : A$ に対して

$$(a_0 \equiv a_1) = \mathsf{Path}((\_)\ A, a_0, a_1)$$

と定義する。

例

$A : \mathsf{Type},\ a : A$ に対して

$$\mathsf{refl} : a \equiv a$$
$$\mathsf{refl} = \langle \_ \rangle\ a$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Path types

Path は関数みたいなものなので関数外延性は自明。

関数外延性

A : Type, $B : A \to$ Type, $f, g : (x : A) \to B\ x$ に対して

$$\mathsf{funext} : ((x : A) \to f\ x \equiv g\ x) \to f \equiv g$$
$$\mathsf{funext}\ p = \langle i \rangle\ \lambda x.p\ x\ i$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Path types

あらゆる構成は path を保つ。

Congruence

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{cong} : (f : (x : A) \to B\ x)\{x_1\ x_2 : A\}(p : x_1 \equiv x_2) \\
&\quad \to \mathsf{Path}((i)\ B\ (p\ i), f\ x_1, f\ x_2) \\
&\mathsf{cong}\ f\ p = \langle i \rangle\ f\ (p\ i)
\end{aligned}
$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Path types

同一な型はその要素で区別できない。

Transport

$$\text{transport} : \{A\ B : \text{Type}\} \to A \equiv B \to A \to B$$
$$\text{transport}\ p\ x = \text{transp}((i)\ p\ i, \bot, x)$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

同値

同値のなす型を定義する。

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{IsContr} : \mathsf{Type} \to \mathsf{Type}\\
&\mathsf{IsContr}\ A = (a : A) \times ((x : A) \to a \equiv x)\\
&\mathsf{Fiber} : \{A\ B : \mathsf{Type}\} \to (A \to B) \to B \to \mathsf{Type}\\
&\mathsf{Fiber}\ f\ b = (x : A) \times f\ x \equiv b\\
&\mathsf{IsEquiv} : \{A\ B : \mathsf{Type}\} \to (A \to B) \to \mathsf{Type}\\
&\mathsf{IsEquiv}\ f = (y : B) \to \mathsf{IsContr}\ (\mathsf{Fiber}\ f\ y)\\
&(\_ \simeq \_) : \mathsf{Type} \to \mathsf{Type} \to \mathsf{Type}\\
&A \simeq B = (f : A \to B) \times \mathsf{IsEquiv}\ f
\end{aligned}
$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Glue type

Univalence への鍵。

アイディア

$(\_ \equiv \_)$ は $(\_ \simeq \_)$ で不変であるべき。

$$
\begin{tikzcd}
A_{01} \arrow[r, "\simeq"] & A_{11} \\
A_{00} \arrow[u, dotted, "\equiv"] \arrow[r, "\simeq"'] & A_{10} \arrow[u, "\equiv"']
\end{tikzcd}
$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Glue type

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathsf{Type} \qquad \Gamma \vdash \varphi : \mathbb{F} \qquad \Gamma, \varphi \vdash T : \mathsf{Type} \qquad \Gamma, \varphi \vdash f : T \simeq A}{\Gamma \vdash \mathsf{Glue}(A, \varphi, T, f) : \mathsf{Type}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma, \varphi \vdash t : T \qquad \Gamma, \varphi \vdash f\ t = a}{\Gamma \vdash \mathsf{glue}(a, \varphi, t) : \mathsf{Glue}(A, \varphi, T, f)} \qquad \frac{\Gamma \vdash b : \mathsf{Glue}(A, \varphi, T, f)}{\Gamma \vdash \mathsf{unglue}(\varphi, b) : A}$$

$$\mathsf{Glue}(A, \top, T, f) = T \qquad \mathsf{glue}(f\ t, \top, t) = t \qquad \mathsf{unglue}(\top, b) = f\ b$$

$$b = \mathsf{glue}(\mathsf{unglue}(\varphi, b), \varphi, b) \qquad \mathsf{unglue}(\varphi, \mathsf{glue}(a, \varphi, t)) = a$$

Glue type

例

$$\frac{i : \mathbb{I} \vdash A : \mathsf{Type} \qquad i : \mathbb{I}, (i = 0) \vee (i = 1) \vdash T : \mathsf{Type} \qquad i : \mathbb{I}, (i = 0) \vee (i = 1) \vdash f : T \simeq A}{i : \mathbb{I} \vdash \mathsf{Glue}(A, (i = 0) \vee (i = 1), T, f) : \mathsf{Type}}$$

$$\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[r, "f_1", "\simeq"'] & A_1 \\
T_0 \arrow[u, dotted, "\mathsf{Glue}", "\equiv"'] \arrow[r, "\simeq", "f_0"'] & A_0 \arrow[u, "\equiv", "A"']
\end{tikzcd}$$

Univalence

$f : A \simeq B$ に対して、

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\lambda x.x", "\simeq"'] & B \\
A \arrow[u, dotted, "\mathsf{Glue}"] \arrow[r, "\simeq", "f"'] \arrow[ur, phantom, "\equiv \qquad \equiv"] & B \arrow[u, "\langle \_ \rangle B"']
\end{tikzcd}
$$

もうちょっと頑張ると

$$(A \equiv B) \simeq (A \simeq B)$$

を作れる。

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

円周

円周 $\mathbb{S}^1$ は次の構成子を持つ HIT.

$$\mathsf{base} : \mathbb{S}^1$$
$$\mathsf{loop} : \mathsf{base} \equiv \mathsf{base}$$

除去規則

$$\frac{A : \mathbb{S}^1 \to \mathsf{Type} \qquad a : A\ \mathsf{base} \qquad l : \mathsf{Path}((i)\ A\ (\mathsf{loop}\ i), a, a) \qquad x : \mathbb{S}^1}{\mathsf{elim}_{\mathbb{S}^1}\ A\ a\ l\ x : A\ x}$$

$$\mathsf{elim}_{\mathbb{S}^1}\ A\ a\ l\ \mathsf{base} = a \qquad \mathsf{cong}\ (\mathsf{elim}_{\mathbb{S}^1}\ A\ a\ l)\ \mathsf{loop} = l$$

円周

内部的には次のような規則。

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{base} : \mathbb{S}^1} \qquad \frac{\Gamma \vdash r : \mathbb{I}}{\Gamma \vdash \mathsf{loop}(r) : \mathbb{S}^1} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{loop}(0) = \mathsf{base}}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{loop}(1) = \mathsf{base}}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, x : \mathbb{S}^1 \vdash A : \mathsf{Type} \\ \Gamma \vdash a : A[x := \mathsf{base}] \qquad \Gamma, i : \mathbb{I} \vdash l : A[x := \mathsf{loop}(i)] \\ \Gamma \vdash l[i := 0] = a \qquad \Gamma \vdash l[i := 1] = a \qquad \Gamma \vdash u : \mathbb{S}^1\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{elim}_{\mathbb{S}^1}((x)\, A, a, (i)\, l, u) : A[x := u]}$$

$$\mathsf{elim}_{\mathbb{S}^1}((x)\, A, a, (i)\, l, \mathsf{base}) = a \qquad \mathsf{elim}_{\mathbb{S}^1}((x)\, A, a, (i)\, l, \mathsf{loop}(r)) = l[i := r]$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

円周

内部的には homogeneous composition を構成子として追加。

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi : \mathbb{F} \qquad \Gamma, \varphi, i : \mathbb{I} \vdash u : \mathbb{S}^1 \qquad \Gamma \vdash a_0 : \mathbb{S}^1 \qquad \Gamma, \varphi \vdash a_0 = u[i := 0]}{\Gamma \vdash \mathsf{hcomp}_{\mathbb{S}^1}(\varphi, (i)\, u, a_0) : \mathbb{S}^1}$$

$$\mathsf{hcomp}_{\mathbb{S}^1}(\top, (i)\, u, u[i := 0]) = u[i := 1]$$

$$\mathsf{elim}_{\mathbb{S}^1}((x)\, A, a, (i)\, l, \mathsf{hcomp}_{\mathbb{S}^1}(\varphi, (i)\, u, a_0)) =$$

(A の hcomp と transp を使ってできるもの)

Propositional truncation

A : Type に対して propositional truncation $\|A\|$: Type は次の構成子を持つ HIT.

$$|\_| : A \to \|A\|$$
$$\text{squash} : (x\ y : \|A\|) \to x \equiv y$$

つまり A を「命題」(任意の 2 点が同一な型) に潰したもの。

Propositional truncation

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathsf{Type}}{\Gamma \vdash \|A\| : \mathsf{Type}} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash |a| : \|A\|}$$

$$\frac{\Gamma \vdash c_0 : \|A\| \qquad \Gamma \vdash c_1 : \|A\| \qquad \Gamma \vdash r : \mathbb{I}}{\Gamma \vdash \mathsf{squash}(c_0, c_1, r) : \|A\|} \qquad \mathsf{squash}(c_0, c_1, 0) = c_0$$

$$\mathsf{squash}(c_0, c_1, 1) = c_1$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash A : \mathsf{Type} \qquad \Gamma \vdash \varphi : \mathbb{F} \\ \Gamma, \varphi, i : \mathbb{I} \vdash u : \|A\| \qquad \Gamma \vdash a_0 : \|A\| \qquad \Gamma, \varphi \vdash a_0 = u[i := 0]\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{hcomp}_{\|\_\|}(A, \varphi, (i)\ u, a_0) : \|A\|}$$

(適当な除去規則)

Stream

A : Type に対し Stream A : Type は次の destructor を持つ余帰納的型。

$$\mathsf{head} : \mathsf{Stream}\ A \to A$$
$$\mathsf{tail} : \mathsf{Stream}\ A \to \mathsf{Stream}\ A$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Bisimilarity

$(\_ \approx \_)$: Stream $A \to$ Stream $A \to$ Type は次の destructor を持つ余帰納的型。

$$\approx\text{head} : \{x\ y : \text{Stream } A\} \to x \approx y \to \text{head } x \equiv \text{head } y$$
$$\approx\text{tail} : \{x\ y : \text{Stream } A\} \to x \approx y \to \text{tail } x \approx \text{tail } y$$

$\approx$ から $\equiv$.

$$\text{bisim} : \{x\ y : \text{Stream } A\} \to x \approx y \to x \equiv y$$
$$\text{head } (\text{bisim } s\ i) = \approx\text{head } s\ i$$
$$\text{tail } (\text{bisim } s\ i) = \text{bisim } (\approx\text{tail } s)\ i$$

もう少し頑張れば $(x \equiv y) \simeq (x \approx y)$.

まとめ

Cubical Type Theory **の構成要素。**

- Interval $\mathbb{I}$
- Homogeneous composition
- Generalized transport
- Path type
- Glue type
- HITs

各種話題

- Cubical Agda の実装 (Vezzosi et al. 2019)
- HoTT の cubical models (Bezem et al. 2014; Orton and Pitts 2016; Uemura 2019; Awodey 2018; Swan and Uemura 2021)
- Formalization projects (Ljungström and Mörtberg 2023; Cherubini et al. 2024; Brunerie et al. 2022; Lamiaux et al. 2023)

導入

Interval

Homogeneous composition

Transport

Path types

Glue type

HITs

Coinductive types

まとめ

References

hcomp と transp の計算

参考文献 I

Carlo Angiuli, Guillaume Brunerie, Thierry Coquand, Kuen-Bang Hou (Favonia), Robert Harper, and Daniel R. Licata (2019). *Syntax and Models of Cartesian Cubical Type Theory*. URL: https://github.com/dlicata335/cart-cube.

Carlo Angiuli, Evan Cavallo, Anders Mörtberg, and Max Zeuner (2020). *Internalizing Representation Independence with Univalence*. arXiv: 2009.05547v1.

Steve Awodey (2018). "A cubical model of homotopy type theory". In: *Annals of Pure and Applied Logic* 169.12. Logic Colloquium 2015, pp. 1270–1294. DOI: 10.1016/j.apal.2018.08.002.

Henning Basold, Herman Geuvers, and Niels Van Der Weide (2017). "Higher Inductive Types in Programming". In: *Journal of Universal Computer Science* 23.1, pp. 63–88. DOI: 10.3217/jucs-023-01-0063.

参考文献 II

Marc Bezem, Thierry Coquand, and Simon Huber (2014). "A Model of Type Theory in Cubical Sets". In: *19th International Conference on Types for Proofs and Programs (TYPES 2013)*. Ed. by Ralph Matthes and Aleksy Schubert. Vol. 26. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, pp. 107–128. DOI: 10.4230/LIPIcs.TYPES.2013.107.

Guillaume Brunerie (2016). "On the homotopy groups of spheres in homotopy type theory". PhD thesis. University of Nice. arXiv: 1606.05916v1.

参考文献 III

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Guillaume Brunerie, Axel Ljungström, and Anders Mörtberg (2022). "Synthetic Integral Cohomology in Cubical Agda". In: *30th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL 2022)*. Ed. by Florin Manea and Alex Simpson. Vol. 216. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 11:1–11:19. DOI: 10.4230/LIPIcs.CSL.2022.11.

Felix Cherubini, Thierry Coquand, and Matthias Hutzler (2024). "A foundation for synthetic algebraic geometry". In: *Mathematical Structures in Computer Science* 34.9, pp. 1008–1053. DOI: 10.1017/S0960129524000239.

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

参考文献 IV

Cyril Cohen, Thierry Coquand, Simon Huber, and Anders Mörtberg (2018). "Cubical Type Theory: A Constructive Interpretation of the Univalence Axiom". In: *21st International Conference on Types for Proofs and Programs (TYPES 2015)*. Ed. by Tarmo Uustalu. Vol. 69. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 5:1–5:34. DOI: 10.4230/LIPIcs.TYPES.2015.5.

Thierry Coquand, Simon Huber, and Anders Mörtberg (2018). "On Higher Inductive Types in Cubical Type Theory". In: *Proceedings of the 33rd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. LICS '18. Oxford, United Kingdom: ACM, pp. 255–264. DOI: 10.1145/3209108.3209197.

Simon Huber (2019). "Canonicity for Cubical Type Theory". In: *J. Autom. Reason.* 63.2, pp. 173–210. DOI: 10.1007/s10817-018-9469-1.

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

参考文献 V

Thomas Lamiaux, Axel Ljungström, and Anders Mörtberg (2023). "Computing Cohomology Rings in Cubical Agda". In: *Proceedings of the 12th ACM SIGPLAN International Conference on Certified Programs and Proofs*. CPP 2023. Boston, MA, USA: Association for Computing Machinery, pp. 239–252. DOI: 10.1145/3573105.3575677.

Axel Ljungström and Anders Mörtberg (2023). "Formalizing $\pi^4(\mathbb{S}^3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and Computing a Brunerie Number in Cubical Agda". In: *38th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS 2023, Boston, MA, USA, June 26-29, 2023*. IEEE, pp. 1–13. DOI: 10.1109/LICS56636.2023.10175833. arXiv: 2302.00151.

参考文献 VI

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Ian Orton and Andrew M. Pitts (2016). "Axioms for Modelling Cubical Type Theory in a Topos". In: *25th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL 2016)*. Ed. by Jean-Marc Talbot and Laurent Regnier. Vol. 62. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 24:1–24:19. DOI: 10.4230/LIPIcs.CSL.2016.24.

Jonathan Sterling and Carlo Angiuli (2021). "Normalization for Cubical Type Theory". In: *2021 36th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, pp. 1–15. DOI: 10.1109/LICS52264.2021.9470719.

参考文献 VII

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Andrew W. Swan and Taichi Uemura (2021). "On Church' s thesis in cubical assemblies". In: *Mathematical Structures in Computer Science* 31. Special Issue 10: Homotopy Type Theory 2019, pp. 1185–1204. DOI: 10.1017/S0960129522000068.

The Univalent Foundations Program (2013). *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study. URL: http://homotopytypetheory.org/book/.

Taichi Uemura (2019). "Cubical Assemblies, a Univalent and Impredicative Universe and a Failure of Propositional Resizing". In: *24th International Conference on Types for Proofs and Programs (TYPES 2018)*. Ed. by Peter Dybjer, José Espírito Santo, and Luís Pinto. Vol. 130. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 7:1–7:20. DOI: 10.4230/LIPIcs.TYPES.2018.7.

参考文献 VIII

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Andrea Vezzosi (2017). *Streams for Cubical Type Theory*. URL: https://saizan.github.io/streams-ctt.pdf.

Andrea Vezzosi, Anders Mörtberg, and Andreas Abel (July 2019). "Cubical Agda: A Dependently Typed Programming Language with Univalence and Higher Inductive Types". In: *Proc. ACM Program. Lang.* 3.ICFP. DOI: 10.1145/3341691.

(Heterogeneous) composition

$$\frac{\Gamma, i : \mathbb{I} \vdash A : \mathsf{Type} \qquad \Gamma \vdash \varphi : \mathbb{F} \qquad \Gamma, \varphi, i : \mathbb{I} \vdash u : A \qquad \Gamma \vdash a_0 : A[i := 0] \qquad \Gamma, \varphi \vdash a_0 = u[i := 0]}{\Gamma \vdash \mathsf{comp}((i)\, A, \varphi, (i)\, u, a_0) : A[i := 1]}$$

$$\mathsf{comp}((i)\, A, \top, (i)\, u, u[i := 0]) = u[i := 1]$$

これは

$$\begin{aligned} &\mathsf{comp}((i)\, A, \varphi, (i)\, u, a_0) = \\ &\qquad \mathsf{hcomp}(A[i := 1], \varphi, (i)\, \mathsf{transp}((j)\, A[i := i \vee j], (i = 1), u), a_1) \\ &a_1 = \mathsf{transp}((i)\, A, \bot, a_0) \end{aligned}$$

と定義できる。

Homogeneous filling operator

$$\frac{\Gamma, \varphi, i : \mathbb{I} \vdash u : A \qquad \begin{array}{c}\Gamma \vdash A : \mathsf{Type} \qquad \Gamma \vdash \varphi : \mathbb{F} \\ \Gamma \vdash a_0 : A \qquad \Gamma, \varphi \vdash a_0 = u[i := 0]\end{array} \qquad \Gamma \vdash r : \mathbb{I}}{\Gamma \vdash \mathsf{hfill}(A, \varphi, (i)\, u, a_0, r) : A}$$

$$\mathsf{hfill}(A, \varphi, (i)\, u, a_0, 0) = a_0$$

$$\mathsf{hfill}(A, \varphi, (i)\, u, a_0, 1) = \mathsf{hcomp}(A, \varphi, (i)\, u, a_0)$$

$$\mathsf{hfill}(A, \top, (i)\, u, u[i := 0], r) = u[i := r]$$

これは

$$\mathsf{hfill}(A, \varphi, (i)\, u, a_0, r) = \mathsf{hcomp}(A, \varphi \vee (r = 0), (i)\, v, a_0)$$
$$\varphi, i : \mathbb{I} \vdash v = u[i := i \wedge r]$$
$$r = 0, i : \mathbb{I} \vdash v = a_0$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Transport filling operator

$$\frac{\Gamma, i : \mathbb{I} \vdash A : \mathsf{Type} \qquad \Gamma \vdash \varphi : \mathbb{F} \qquad \Gamma \vdash a_0 : A[i := 0] \qquad \Gamma, \varphi, i : \mathbb{I} \vdash A = A[i := 0] \qquad \Gamma \vdash r : \mathbb{I}}{\Gamma \vdash \mathsf{transpFill}((i)\ A, \varphi, a_0, r) : A[i := r]}$$

$$\mathsf{transpFill}((i)\ A, \varphi, a_0, 0) = a_0$$

$$\mathsf{transpFill}((i)\ A, \varphi, a_0, 1) = \mathsf{transp}((i)\ A, \varphi, a_0)$$

$$\mathsf{transpFill}((\_)\ A, \top, a_0, r) = a_0$$

これは

$$\mathsf{transpFill}((i)\ A, \varphi, a_0, r) = \mathsf{transp}((i)\ A[i := i \wedge r], \varphi \vee (r = 0), a_0)$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

関数型

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash A : \mathsf{Type} \\ \Gamma, x : A \vdash B : \mathsf{Type} \qquad \Gamma \vdash \varphi : \mathbb{F} \qquad \Gamma, \varphi, i : \mathbb{I} \vdash u : (x : A) \to B \\ \Gamma \vdash f_0 : (x : A) \to B \qquad \Gamma, \varphi \vdash f_0 = u[i := 0]\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \mathsf{hcomp}((x : A) \to B, \varphi, (i)\ u, f_0) \\ = \lambda x.\mathsf{comp}((i)\ B[x := v], \varphi, (i)\ u\ v, f_0\ w)\end{array}}$$

ここで

$$\Gamma, x : A, i : \mathbb{I} \vdash v = \mathsf{hfill}(A, \bot, !, x, \sim i)$$

$$\Gamma, x : A \vdash w = v[i := 0]$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

関数型

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, i : \mathbb{I} \vdash A : \mathsf{Type} \qquad \Gamma, i : \mathbb{I}, x : A \vdash B : \mathsf{Type} \\ \Gamma \vdash \varphi : \mathbb{F} \qquad \Gamma \vdash f_0 : (x : A[i := 0]) \to B[i := 0] \\ \Gamma, \varphi, i : \mathbb{I} \vdash A = A[i := 0] \qquad \Gamma, \varphi, i : \mathbb{I}, x : A \vdash B = B[i := 0]\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{transp}((i)\ (x : A) \to B, \varphi, f_0) = \lambda x.\mathsf{transp}((i)\ B[x := v], \varphi, f_0\ w)}$$

ここで

$$\Gamma, j : \mathbb{I} \vdash A' = A[i := \sim j]$$
$$\Gamma, i : \mathbb{I}, x : A[i := 1] \vdash v = \mathsf{transpFill}((j)\ A', \varphi, x, \sim i) : A$$
$$\Gamma, x : A[i := 1] \vdash w = \mathsf{transp}((j)\ A', \varphi, x) : A[i := 0]$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

対型

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash A : \mathsf{Type} \\ \Gamma, x : A \vdash B : \mathsf{Type} \qquad \Gamma \vdash \varphi : \mathbb{F} \qquad \Gamma, \varphi, i : \mathbb{I} \vdash u : (x : A) \times B \\ \Gamma \vdash c_0 : (x : A) \times B \qquad \Gamma, \varphi \vdash c_0 = u[i := 0]\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \mathsf{hcomp}((x : A) \times B, \varphi, (i)\, u, c_0) \\ = \langle \mathsf{hcomp}(A, \varphi, (i)\, u.1, c_0.1), \mathsf{comp}((i)\, B[x := v], \varphi, (i)\, u.2, c_0.2) \rangle\end{array}}$$

ここで

$$\Gamma, i : \mathbb{I} \vdash v = \mathsf{hfill}(A, \varphi, (i)\, u.1, c_0.1, i)$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

対型

$$\frac{\begin{array}{cc} \Gamma, i : \mathbb{I} \vdash A : \mathsf{Type} & \Gamma, i : \mathbb{I}, x : A \vdash B : \mathsf{Type} \\ \Gamma \vdash \varphi : \mathbb{F} & \Gamma \vdash c_0 : (x : A[i := 0]) \times B[i := 0] \\ \Gamma, \varphi, i : \mathbb{I} \vdash A = A[i := 0] & \Gamma, \varphi, i : \mathbb{I}, x : A \vdash B = B[i := 0] \end{array}}{\begin{array}{c} \Gamma \vdash \mathsf{transp}((i)\ (x : A) \times B, \varphi, c_0) = \\ \langle \mathsf{transp}((i)\ A, \varphi, c_0.1), \mathsf{transp}((i)\ B[x := v], \varphi, c_0.2) \rangle \end{array}}$$

ここで

$$\Gamma, i : \mathbb{I} \vdash v = \mathsf{transpFill}((i)\ A, \varphi, c_0.1, i) : A$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Path type

$$\frac{\begin{matrix}\Gamma, j : \mathbb{I} \vdash A : \mathsf{Type} \qquad \Gamma \vdash a_0 : A[j := 0] \\ \Gamma \vdash a_1 : A[j := 1] \qquad \Gamma \vdash \varphi : \mathbb{F} \qquad \Gamma, \varphi, i : \mathbb{I} \vdash u : \mathsf{Path}((j)\ A, a_0, a_1) \\ \Gamma \vdash p_0 : \mathsf{Path}((j)\ A, a_0, a_1) \qquad \Gamma, \varphi \vdash p_0 = u[i := 0]\end{matrix}}{\begin{matrix}\Gamma \vdash \mathsf{hcomp}(\mathsf{Path}((j)\ A, a_0, a_1), \varphi, (i)\ u, p_0) \\ = \langle j \rangle\ \mathsf{hcomp}(A, \varphi \vee (j = 0) \vee (j = 1), (i)\ v, p_0\ j)\end{matrix}}$$

ここで

$$\Gamma, j : \mathbb{I}, \varphi, i : \mathbb{I} \vdash v = u\ j$$

$$\Gamma, j : \mathbb{I}, j = 0, i : \mathbb{I} \vdash v = a_0$$

$$\Gamma, j : \mathbb{I}, j = 1, i : \mathbb{I} \vdash v = a_1$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Path type

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, i : \mathbb{I}, j : \mathbb{I} \vdash A : \mathsf{Type} \\ \Gamma, i : \mathbb{I} \vdash a_0 : A[j := 0] \qquad \Gamma, i : \mathbb{I} \vdash a_1 : A[j := 1] \\ \Gamma \vdash \varphi : \mathbb{F} \qquad \Gamma \vdash p_0 : \mathsf{Path}((j)\, A[i := 0], a_0[i := 0], a_1[i := 0]) \\ \Gamma, \varphi, i : \mathbb{I}, j : \mathbb{I} \vdash A = A[i := 0] \\ \Gamma, \varphi, i : \mathbb{I} \vdash a_0 = a_0[i := 0] \qquad \Gamma, \varphi, i : \mathbb{I} \vdash a_1 = a_1[i := 0]\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \mathsf{transp}((i)\, \mathsf{Path}((j)\, A, a_0, a_1), \varphi, p_0) \\ = \langle j \rangle\, \mathsf{comp}((i)\, A, \varphi \vee (j = 0) \vee (j = 1), v, p_0\ j)\end{array}}$$

ここで

$$\Gamma, j : \mathbb{I}, \varphi, i : \mathbb{I} \vdash v = p_0\ j$$

$$\Gamma, j : \mathbb{I}, j = 0, i : \mathbb{I} \vdash v = a_0$$

$$\Gamma, j : \mathbb{I}, j = 1, i : \mathbb{I} \vdash v = a_1$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

円周

$$\mathsf{hcomp}(\mathbb{S}^1, \varphi, (i)\; u, a_0) = \mathsf{hcomp}_{\mathbb{S}^1}(\varphi, (i)\; u, a_0)$$

$$\mathsf{transp}((\_)\; \mathbb{S}^1, \varphi, \mathsf{base}) = \mathsf{base} \qquad \mathsf{transp}((\_)\; \mathbb{S}^1, \varphi, \mathsf{loop}(r)) = \mathsf{loop}(r)$$

$$\mathsf{transp}((\_)\; \mathbb{S}^1, \varphi, \mathsf{hcomp}_{\mathbb{S}^1}(\psi, (i)\; u, a_0)) =$$

$$\mathsf{hcomp}_{\mathbb{S}^1}(\psi, (i)\; \mathsf{transp}((\_)\; \mathbb{S}^1, \varphi, u), \mathsf{transp}((\_)\; \mathbb{S}^1, \varphi, a_0))$$

導入
Interval
Homogeneous composition
Transport
Path types
Glue type
HITs
Coinductive types
まとめ
References
hcomp と transp の計算

Propositional truncation

$$\mathsf{hcomp}(\|A\|, \varphi, (i)\, u, a_0) = \mathsf{hcomp}_{\|\_\|}(A, \varphi, (i)\, u, a_0)$$

$$\mathsf{transp}((i)\, \|A\|, \varphi, |a|) = |\mathsf{transp}((i)\, A, \varphi, a)|$$

$$\mathsf{transp}((i)\, \|A\|, \varphi, \mathsf{squash}(c_0, c_1, r)) =$$

$$\mathsf{squash}(\mathsf{transp}((i)\, \|A\|, \varphi, c_0), \mathsf{transp}((i)\, \|A\|, \varphi, c_1), r)$$

$$\mathsf{transp}((i)\, \|A\|, \varphi, \mathsf{hcomp}_{\|\_\|}(A[i := 0], \psi, (j)\, u, a_0)) = \mathsf{hcomp}_{\|\_\|}(A[i :=$$

$$1], \psi, (j)\, \mathsf{transp}((i)\, \|A\|, \varphi, u), \mathsf{transp}((i)\, \|A\|, \varphi, a_0))$$