トポスと高階論理 *

Taichi Uemura (@t_uemura669101)

2018 年 12 月 9 日

概要

トポスの内部言語とその応用を紹介します。

目次

0 はじめに

トポス (topos) とは、有限極限と部分対象分類子と冪対象 (power object) を持つ圏である。簡潔な定義ながら、トポスは驚くほど豊かな構造が持つことが知られている [MLM92, Joh02a]。例えば、

- トポスはデカルト閉である (定理 31);
- トポスのスライスはまたトポスである (定理 32)。よって、トポスは局所デカルト閉 (locally cartesian closed) である;
- トポスは有限余極限を持つ;
- トポスにおいて同値関係は effective である

などが言える。これらの事実は純粋に圏論的に示すこともできるが、この文書では別のアプローチとして、高

* この文書は Category Theory Advent Calendar 2018 (https://adventar.org/calendars/3168) の 9 日目の記事です。前は 7 日目の@mod_poppo さんの「アプリカティブ関手ってなに？モノイド圏との関係は？調べてみました！」でした。次は 11 日目の@yf0fyf さんの「直観主義線型論理の圏論的意味論について」です。

階論理 (higher-order logic) を使った証明を与える。この文書の目的はトポスの圏論的性質を見る前に高階論理との関連を与え、いくつかの性質を高階論理を使って簡潔に示そうというものである。

高階論理は大雑把に言うと部分集合や部分集合の集合を量化できる論理である。トポスが高階論理の意味論を与えることもよく知られている。ただし、論理結合子や量化子を解釈するにはある程度の圏論的構造が必要で、それではこの文書の趣旨に反する。そこで、やや直観的ではなくなるが等号のみを使って高階論理を表現する。この等号のみを使った高階論理は論理結合子や量化子を使った高階論理と同等の証明能力を持つことが知られている [LS86]。

1 章では高階論理を導入する。2 章でトポスを定義する。この段階ではトポスの圏論的性質には一切立ち入らない。3 章で高階論理のトポスでの解釈を与える。4 章でトポスの**内部言語** (internal language) を高階理論として定義し、内部言語で導出できることとトポスの性質との関係をいくつか見る。5 章でトポスの性質を内部言語を使っていくつか証明する。

基本的な圏論の知識 (極限、部分対象、随伴、デカルト閉圏など) は仮定するが、トポスについては前提知識は仮定しない。トポスの知識がある人は圏論的な証明と高階論理を使った証明を比べてみると面白いと思います。数理論理学や型理論に少しでも馴染みがあると望ましい。

1 高階論理

この章では、高階の (直観主義) 論理を導入する。ここでいう高階論理は Lambek & Scott の等号に基づいた型理論 [LS86, II.2] と本質的に同じものである。

高階理論 (higher-order theory) は次の要素からなる。

- 基底型の集合 T
- T 上のシグニチャ Σ
- (T, Σ) 上の公理の集合 A

以下でこれらの要素について説明する。

集合 $T = \{\alpha, \beta, \dots\}$ に対して、T 上の**型** (type または sort) $\sigma, \tau, \dots$ を次の文法で定める。

$$\sigma, \tau ::= \alpha \mid 1 \mid \sigma \times \tau \mid \Omega \mid \mathrm{P}\sigma$$

別の言い方をすると、T 上の型の集合は次のように帰納的に定義される。

- $\alpha \in T$ は T 上の型である。
- 1 は T 上の型である。
- σ, τ が T 上の型ならば、$\sigma \times \tau$ は T 上の型である。
- Ω は T 上の型である。
- σ が T 上の型ならば、$\mathrm{P}\sigma$ は T 上の型である。

T 上の型のうち、T の要素 α は**基底型** (basic type または basic sort) と呼ばれる。T 上の型の集合を $\mathsf{Type}(T)$ と書く。各型について直観を言うと、1 は 1 点集合 $\{*\}$ のような型、$\sigma \times \tau$ は直積のような型、Ω は真偽値全体の集合のような型、$\mathrm{P}\sigma$ は冪集合のような型である。

集合 T に対し、T 上の**シグニチャ** (signature) は T 上の型の有限列 $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ と T 上の型 τ で添字付け

られた集合の属 $(\Sigma_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n;\tau})_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n,\tau\in\mathsf{Type}(T)}$ である。f が $\Sigma_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n;\tau}$ の要素であることを

$$f : \sigma_1, \ldots, \sigma_n \to \tau$$

と書き、f は引数の型が $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ で返り値の型が τ の**関数記号** (function symbol) であると言う。

補足 1. 高階論理のシグニチャは関係記号は持たないが、$\sigma_1, \ldots, \sigma_n \to \Omega$ 型の関数記号がその役割を果たす。

Σ を集合 T 上のシグニチャとする。各型 σ に対して、可算無限個の**変数** (variable) $x, y, \ldots$ が与えられているとする。x が σ 型の変数であることを強調するときは x^σ のように書く。各型 σ に対して、σ 型の**項** (term) の集合を次のように帰納的に定義する。

- x が σ 型の変数ならば x は σ 型の項である。
- f が $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \to \tau$ 型の関数記号、M_i が σ_i 型の項 $(i = 1, \ldots, n)$ ならば $f(M_1, \ldots, M_n)$ は τ 型の項である。
- $*$ は 1 型の項である。
- M が σ 型の項、N が τ 型の項ならば (M, N) は $\sigma \times \tau$ 型の項である。
- M が $\sigma \times \tau$ 型の項ならば $\pi_1(M)$ は σ 型の項、$\pi_2(M)$ は τ 型の項である。
- M と N が σ 型の項ならば $M =_\sigma N$ は Ω 型の項である。
- S が $\mathrm{P}\sigma$ 型の項、M が σ 型の項ならば $M \in S$ は Ω 型の項である。
- φ が Ω 型の項、x が σ 型の変数ならば $\{x : \sigma \mid \varphi\}$ は $\mathrm{P}\sigma$ 型の項である。

項 $\{x : \sigma \mid \varphi\}$ 中の変数 x は束縛変数として扱い、α-同値な項は同一視する。σ 型の変数 x と σ 型の項 M と任意の項 N に対して、**代入** (substitution) $N[M/x]$ はいつものように定義される。Ω 型の項は**論理式** (formula) と呼ばれる。自由変数を含まない論理式を**閉論理式** (closed formula) と呼ぶ。

定義 2. **高階理論** (higher-order theory) は次の要素からなる。

- 集合 T
- T 上のシグニチャ Σ
- (T, Σ) 上の閉論理式の集合 A

A に属する閉論理式を**公理** (axiom) と呼ぶ。

補足 3. 論理式の定義において、論理結合子や量化子が無いことを疑問に思うかもしれないが、それらは等号を使って定義される (定義 6)。

高階論理の証明体系を与える。様々な流儀がありうるが、ここではシーケント計算を考える。高階論理の**シーケント** (sequent) は次の形をしている。

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_X \psi$$

ここで、X は変数の有限集合、$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ と ψ は自由変数がすべて X の要素であるような論理式である。論理式の有限列 $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ はしばしば $\Phi, \Psi, \ldots$ などの文字で表す。高階論理の**推論**とはシーケントの有限集合 Ξ とシーケント S の組 (Ξ, S) のことである。推論 $(\{S_1, \ldots, S_n\}, S)$ はしばしば次のように表される。

$$\frac{S_1 \qquad \ldots \qquad S_n}{S}\ (\text{何らかの条件})$$

$$\varphi \vdash_X \varphi \quad (X \vdash \varphi : \Omega) \qquad \frac{\Phi \vdash_X \psi}{\Phi, \varphi \vdash_X \psi}\ (X \vdash \varphi : \Omega) \qquad \frac{\Phi_1, \varphi_1, \varphi_2, \Phi_2 \vdash_X \psi}{\Phi_1, \varphi_2, \varphi_1, \Phi_2 \vdash_X \psi} \qquad \frac{\Phi, \varphi, \varphi \vdash_X \psi}{\Phi, \varphi \vdash_X \psi}$$

$$\frac{\Phi \vdash_X \varphi \qquad \Psi, \varphi \vdash_X \psi}{\Psi, \Phi \vdash_X \psi} \qquad \frac{\Phi \vdash_X \varphi}{\Phi \vdash_{X \cup \{y\}} \varphi} \qquad \frac{\Phi \vdash_{X \cup \{y^\sigma\}} \varphi}{\Phi[M/y] \vdash_X \varphi[M/y]}\ (X \vdash M : \sigma)$$

図 1　構造的規則

$$\vdash_X M =_\sigma M \quad (X \vdash M : \sigma) \qquad M =_\sigma N, \varphi[M/y] \vdash_X \varphi[N/y] \quad (X \vdash M : \sigma; X \vdash N : \sigma; X \cup \{y^\sigma\} \vdash \varphi : \Omega)$$

図 2　等号の公理

$$\vdash_{\{x^1\}} x =_1 * \qquad \vdash_{\{x^\sigma, y^\tau\}} \pi_1(x, y) =_\sigma x \qquad \vdash_{\{x^\sigma, y^\tau\}} \pi_2(x, y) =_\tau y \qquad \vdash_{\{x^{\sigma \times \tau}\}} (\pi_1(x), \pi_2(x)) =_{\sigma \times \tau} x$$

$$\vdash_X (M \in \{x : \sigma \mid \varphi\}) =_\Omega \varphi[M/x] \quad (X \cup \{x^\sigma\} \vdash \varphi : \Omega; X \vdash M : \sigma)$$

$$\frac{\Phi \vdash_{X \cup \{x^\sigma\}} x \in S =_\Omega x \in T}{\Phi \vdash_X S =_{\mathrm{P}\sigma} T}\ (X \vdash S : \mathrm{P}\sigma; X \vdash T : \mathrm{P}\sigma; x \notin X) \qquad \frac{\Phi, \varphi \vdash_X \psi \qquad \Phi, \psi \vdash_X \varphi}{\Phi \vdash_X \varphi =_\Omega \psi}$$

図 3　その他の規則、公理

推論規則の上段のシーケントを**前提**、下段のシーケントを**結論**と呼ぶ。また、(何らかの条件) は S_i や S に含まれる変数についての条件などを明示するだけで、推論の一部ではない。前提が無い推論は単に

$$S \quad (\text{何らかの条件})$$

と書く。高階論理は表 1-3 に挙げる**推論規則**を持つ。X が変数の有限集合、M が σ 型の項で M の自由変数がすべて X の要素であるとき、$X \vdash M : \sigma$ と書く。また、$\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ で、各 $i = 1, \ldots, n$ に対して $X \vdash \varphi : \Omega$ であるとき $X \vdash \Phi : \Omega$ と書く。

定義 4. 推論が高階理論 $\mathbb{T}$ で**妥当** (admissible) であることを次のように帰納的に定義する。

- φ が $\mathbb{T}$ の公理ならば $(\Xi, (\vdash_{\{\}} \varphi))$ は妥当な推論である。
- $S \in \Xi$ ならば (Ξ, S) は妥当な推論である。
- $(\Xi_1, S_1), \ldots, (\Xi_n, S_n)$ が妥当な推論で $(\{S_1, \ldots, S_n\}, S)$ が高階論理の推論規則ならば、$(\Xi_1 \cup \cdots \cup \Xi_n, S)$ は妥当な推論である。

定義 5. シーケント $\Phi \vdash_X \varphi$ が高階理論 $\mathbb{T} = (T, \Sigma, A)$ で**導出可能** (derivable) とは、推論 $(\{\}, (\Phi \vdash_X \varphi))$ が $\mathbb{T}$ で妥当であることを言う。

定義 6. 次のように高階論理の論理式を定義する。

- $\top := (* =_1 *)$
- $\varphi \wedge \psi := ((\varphi, \psi) =_{\Omega \times \Omega} (\top, \top))$
- $\varphi \Rightarrow \psi := ((\varphi \wedge \psi) =_\Omega \varphi)$

- $\varphi \Leftrightarrow \psi := (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$
- $\forall_{x:\sigma}\varphi := (\{x : \sigma \mid \varphi\} =_{\mathrm{P}\sigma} \{x : \sigma \mid \top\})$
- $\bot := (\forall_{p:\Omega} p)$
- $\varphi \vee \psi := (\forall_{p:\Omega}(\varphi \Rightarrow p) \Rightarrow (\psi \Rightarrow p) \Rightarrow p)$
- $\exists_{x:\sigma}\varphi := (\forall_{p:\Omega}(\forall_{x:\sigma}\varphi \Rightarrow p) \Rightarrow p)$
- $\exists!_{x:\sigma}\varphi := (\exists_{x:\sigma}\varphi) \wedge (\forall_{y:\sigma}\forall_{y':\sigma}\varphi[y/x] \wedge \varphi[y'/x] \Rightarrow y =_\sigma y')$

結合の強さは $\forall, \exists, \exists! < \Rightarrow, \Leftrightarrow < \wedge, \vee < =$ とし、$\Rightarrow$ は右結合とする。

補題 7. 高階論理で次のシーケントは導出可能。

$$p \vdash_{\{p^\Omega\}} p =_\Omega \top \qquad\qquad p =_\Omega \top \vdash_{\{p^\Omega\}} p$$

証明. 読者の演習問題とする。 □

命題 8. 高階論理で次の推論は妥当である。

$$\Phi \vdash_X \top \quad (X \vdash \Phi : \Omega) \qquad \frac{\Phi \vdash_X \varphi}{\Phi, \top \vdash_X \varphi} \qquad \frac{\Phi \vdash_X \varphi \qquad \Phi \vdash_X \psi}{\Phi \vdash_X \varphi \wedge \psi} \qquad \frac{\Phi, \varphi, \psi \vdash_X \chi}{\Phi, \varphi \wedge \psi \vdash_X \chi} \qquad \frac{\Phi, \varphi \vdash_X \psi}{\Phi \vdash_X \varphi \Rightarrow \psi}$$

$$\frac{\Phi \vdash_X \varphi \qquad \Phi, \psi \vdash_X \chi}{\Phi, \varphi \Rightarrow \psi \vdash_X \chi} \qquad \frac{\Phi \vdash_{X \cup \{x\}} \varphi}{\Phi \vdash_X \forall_{x:\sigma}\varphi} \ (X \vdash \Phi : \Omega; x^\sigma \notin X)$$

$$\frac{\Phi, \varphi[M/x] \vdash_X \psi}{\Phi, \forall_{x:\sigma}\varphi \vdash_X \psi} \ (X \vdash M : \sigma; X \cup \{x^\sigma\} \vdash \varphi : \Omega)$$

証明. 読者の演習問題とする。補題 7 を使うと少し楽です。 □

系 9. 高階論理で次の推論は妥当である。

$$\Phi, \bot \vdash_X \varphi \quad (X \vdash \Phi : \Omega; X \vdash \varphi : \Omega) \qquad \frac{\Phi \vdash_X \varphi}{\Phi \vdash_X \varphi \vee \psi} \ (X \vdash \psi : \Omega) \qquad \frac{\Phi \vdash_X \psi}{\Phi \vdash_X \varphi \vee \psi} \ (X \vdash \varphi : \Omega)$$

$$\frac{\Phi, \varphi \vdash_X \chi \qquad \Phi, \psi \vdash_X \chi}{\Phi, \varphi \vee \psi \vdash_X \chi} \qquad \frac{\Phi \vdash_X \varphi[M/x]}{\Phi \vdash_X \exists_{x:\sigma}\varphi} \ (X \vdash M : \sigma; X \cup \{x^\sigma\} \vdash \varphi : \Omega)$$

$$\frac{\Phi, \varphi \vdash_{X \cup \{x\}} \psi}{\Phi, \exists_{x:\sigma}\varphi \vdash_X \psi} \ (X \vdash \Phi : \Omega; X \vdash \psi : \Omega; x^\sigma \notin X)$$

証明. これらの推論の妥当性は $\forall, \Rightarrow$ についての推論の妥当性から示される。 □

命題 8 と系 9 から、定義 6 の論理結合子や量化子についての直観主義的な推論を行えると言える。

2 トポス

この章ではトポスを定義する。いろいろと避けるために、この文書では圏といえば小圏のこととする。

定義 10. $\mathscr{E}$ を有限極限を持つ圏とする。$\mathscr{E}$ の**部分対象分類子** (subobject classifier) とは、モノ射 $\top : 1 \rightarrowtail \Omega$ であって、次の性質を満たすものである: 任意のモノ射 $m : P \rightarrowtail A$ に対して、次の図式が引き戻しであるよ

うな射 $f : A \to \Omega$ がただ一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[d, tail, "\top"] \\ A \arrow[r, dotted, "f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

このような射 $f : A \to \Omega$ を部分対象 $P \in \mathrm{Sub}_{\mathscr{E}}(A)$ の**特性射** (characteristic morphism) と呼び、χ_P と書く。また、射 $\varphi : A \to \Omega$ に対して、$\top$ の φ に沿った引き戻しで得られる A の部分対象を $\{\varphi\}$ と書く。

定義より、$\top : 1 \rightarrowtail \Omega$ を $\mathscr{E}$ の部分対象分類子としたとき、自然な全単射

$$(\varphi \mapsto \{\varphi\}) : \mathscr{E}(A, \Omega) \cong \mathrm{Sub}_{\mathscr{E}}(A)$$

が得られる。別の言い方をすると、前層 $\mathrm{Sub}_{\mathscr{E}} : \mathscr{E}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ は表現可能である。

例 11. 集合と写像のなす圏で、包含写像 $\{1\} \rightarrowtail \{0, 1\}$ は部分対象分類子である。

定義 12. $\mathscr{E}$ を有限極限を持つ圏、$\top : 1 \rightarrowtail \Omega$ を $\mathscr{E}$ の部分対象分類子とする。$\mathscr{E}$ の対象 A に対し、対角射 $A \rightarrowtail A \times A$ の特性射を $=_A : A \times A \to \Omega$ と書く。

対象 $A \in \mathscr{E}$ に対して、合成 $A \longrightarrow 1 \xrightarrow{\top} \Omega$ のこと $\top_A$ または (文脈上ドメインが明らかな場合は) $\top$ と書く。定義より、モノ射 $m : P \rightarrowtail A$ と射 $f : X \to A$ に対して、次は同値である。

1. $m \circ g = f$ となる射 $g : X \to P$ が存在する。(m はモノなのでこのような射 g は高々一つしか存在しない。)
2. $\chi_P \circ f = \top_A$

別の言い方をすると、モノ射 $m : P \rightarrowtail A$ は χ_P と $\top_A$ のイコライザである。特別な場合として、射 $f, g : X \to A$ に対して、$f = g$ であることと $=_A \circ (f, g) = \top$ であることは同値である。

定義 13. $\mathscr{E}$ を有限極限と部分対象分類子を持つ圏とする。$\mathscr{E}$ の対象 A に対し、A の**冪対象** (power object) とは exponential Ω^A のことである。つまり、A の冪対象は対象 $\mathrm{P}A$ と射 $\in_A : A \times \mathrm{P}A \to \Omega$ の組であり、次を満たす: $\mathscr{E}$ の任意の対象 X と射 $f : A \times X \to \Omega$ に対して、射 $g : X \to \mathrm{P}A$ であって $\in_A \circ (A \times g) = f$ となるものがただ一つ存在する。

定義 14. **トポス** (topos) とは、有限極限と部分対象分類子と冪対象を持つ圏のことである。

例 15. V を有限直積と部分集合と冪集合について閉じた集合とする。例えば、階数が有限な集合の集合や、より一般に α を 0 でない極限順序数として、階数が α より小さい集合の集合などがある。V に属する集合と写像のなす圏はトポスである。

3 高階論理のモデル

高階論理のトポス意味論を与え、その健全性を見る。$\mathbb{T} = (T, \Sigma, A)$ を高階理論、$\mathscr{E}$ をトポスとする。

定義 16. $\mathscr{E}$ での T-**構造**とは、$\mathscr{E}$ の対象の族 $T \to \mathscr{E}$ のことである。

$\mathscr{E}$ での T-構造 $T \ni \alpha \mapsto \alpha^{\mathcal{A}} \in \mathscr{E}$ は次のように $\mathsf{Type}(T)$ 上の族 $\mathsf{Type}(T) \to \mathscr{E}$ に拡張される。

- $1^{\mathcal{A}} = 1$
- $(\sigma \times \tau)^{\mathcal{A}} = \sigma^{\mathcal{A}} \times \tau^{\mathcal{A}}$
- $\Omega^{\mathcal{A}} = \Omega$
- $(\mathrm{P}\sigma)^{\mathcal{A}} = \mathrm{P}(\sigma^{\mathcal{A}})$

定義 17. $\mathscr{E}$ での (T, Σ)-**構造**は次の要素からなる。

- $\mathscr{E}$ での T-構造 $T \ni \alpha \mapsto \alpha^{\mathcal{A}} \in \mathscr{E}$
- 各関数記号 $f : \sigma_1, \ldots, \sigma_n \to \tau$ について $\mathscr{E}$ の射 $f^{\mathcal{A}} : \sigma_1^{\mathcal{A}} \times \cdots \times \sigma_n^{\mathcal{A}} \to \tau^{\mathcal{A}}$

$\mathcal{A}$ を (T, Σ)-構造とする。変数の有限集合 X に対して、$X^{\mathcal{A}} = \prod_{x^\sigma \in X} \sigma^{\mathcal{A}}$ と定義する。項 $X \vdash M : \sigma$ に対して、射 $[\![M]\!]_X^{\mathcal{A}} : X^{\mathcal{A}} \to \sigma^{\mathcal{A}}$ を次のように帰納的に定義する。

- $[\![x^\sigma]\!]_X^{\mathcal{A}} : X^{\mathcal{A}} \to \sigma$ は射影。
- $[\![f(M_1, \ldots, M_n)]\!]_X^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{A}} \circ ([\![M_1]\!]_X^{\mathcal{A}}, \ldots, [\![M_n]\!]_X^{\mathcal{A}})$
- $[\![*]\!]_X^{\mathcal{A}} : X^{\mathcal{A}} \to 1$ はただ一つの射。
- $[\![(M, N)]\!]_X^{\mathcal{A}} = ([\![M]\!]_X^{\mathcal{A}}, [\![N]\!]_X^{\mathcal{A}})$
- $[\![\pi_1(M)]\!]_X^{\mathcal{A}} = \pi_1 \circ [\![M]\!]_X^{\mathcal{A}}$
- $[\![\pi_2(M)]\!]_X^{\mathcal{A}} = \pi_2 \circ [\![M]\!]_X^{\mathcal{A}}$
- $[\![M =_\sigma N]\!]_X^{\mathcal{A}} = (=_{\sigma^{\mathcal{A}}}) \circ ([\![M]\!]_X^{\mathcal{A}}, [\![N]\!]_X^{\mathcal{A}})$
- $[\![M \in S]\!]_X^{\mathcal{A}} = (\in_{\sigma^{\mathcal{A}}}) \circ ([\![M]\!]_X^{\mathcal{A}}, [\![S]\!]_X^{\mathcal{A}})$, ただし M は σ 型の項。
- $[\![\{x : \sigma \mid \varphi\}]\!]_X^{\mathcal{A}} : X^{\mathcal{A}} \to \mathrm{P}(\sigma^{\mathcal{A}})$ は $[\![\varphi]\!]_{X \cup \{x\}}^{\mathcal{A}} : (X \cup \{x\})^{\mathcal{A}} \cong X^{\mathcal{A}} \times \sigma^{\mathcal{A}} \to \Omega$ に対応する射。ここで、α-同値な項は同一視しているので $x \notin X$ と仮定してよい。

また、論理式の有限列 $X \vdash \Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : \Omega$ に対して、$[\![\Phi]\!]_X^{\mathcal{A}} \in \mathrm{Sub}_{\mathscr{E}}(X^{\mathcal{A}})$ を $[\![\Phi]\!]_X^{\mathcal{A}} = \{[\![\varphi_1]\!]_X^{\mathcal{A}}\} \cap \cdots \cap \{[\![\varphi_n]\!]_X^{\mathcal{A}}\}$ と定義する ($\mathscr{E}$ は有限極限を持つので $\mathrm{Sub}_{\mathscr{E}}(A)$ で有限個の共通部分を取れる)。

定義 18. $\mathcal{A}$ を $\mathscr{E}$ での (T, Σ)-構造とする。$\mathcal{A}$ がシーケント $(\Phi \vdash_X \varphi)$ を**満たす**とは、図式

$$\begin{array}{ccc} [\![\Phi]\!]_X^{\mathcal{A}} & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \top} \\ X^{\mathcal{A}} & \xrightarrow[{[\![\varphi]\!]_X^{\mathcal{A}}}]{} & \Omega \end{array}$$

が可換であることを言う。

定義 19. $\mathscr{E}$ での $\mathbb{T} = (T, \Sigma, A)$ の**モデル**とは $\mathscr{E}$ での (T, Σ)-構造 $\mathcal{A}$ であって、各公理 $\varphi \in A$ に対してシーケント $(\vdash_{\{\}} \varphi)$ を満たすもののことである。

補題 20. $\mathcal{A}$ を $\mathscr{E}$ での (T, Σ)-構造とする。高階論理の各推論規則

$$\frac{\Phi_1 \vdash_{X_1} \varphi_1 \qquad \ldots \qquad \Phi_n \vdash_{X_n} \varphi_n}{\Phi \vdash_X \varphi} \text{ (何らかの条件)}$$

に対し、*(何らかの条件)* が成り立っていて、かつ $\mathcal{A}$ がすべての前提 $(\Phi_i \vdash_{X_i} \varphi_i)$ を満たすならば、$\mathcal{A}$ は結論 $(\Phi \vdash_X \varphi)$ を満たす。

証明. 読者の演習問題とする。 □

定理 21. $\mathcal{A}$ を高階理論 $\mathbb{T}$ の $\mathscr{E}$ でのモデルとする。$\mathbb{T}$ で妥当な推論 $(\{S_1, \ldots, S_n\}, S)$ に対し、$\mathcal{A}$ がすべての前提 S_i を満たすならば、$\mathcal{A}$ は結論 S を満たす。

証明. 補題 20 を使って、帰納法で示せる。 □

系 22 (健全性 (soundness))**.** $\mathcal{A}$ を高階理論 $\mathbb{T}$ の $\mathscr{E}$ でのモデルとする。シーケント $(\Phi \vdash_X \varphi)$ が $\mathbb{T}$ で導出可能ならば、$\mathcal{A}$ は $(\Phi \vdash_X \varphi)$ を満たす。

4 内部言語

トポス $\mathscr{E}$ に対して、高階理論 $\mathbb{L}(\mathscr{E})$ とその $\mathscr{E}$ でのモデル $\mathcal{M}(\mathscr{E})$ を次のように定義する。

- $\mathbb{L}(\mathscr{E})$ の基底型の集合は $\mathscr{E}$ の対象全体の集合。
- 基底型 α に対し、$\alpha^{\mathcal{M}(\mathscr{E})} = \alpha$
- $\mathbb{L}(\mathscr{E})$ の $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \to \tau$ 型の関数記号の集合は $\mathscr{E}$ の射 $\sigma_1^{\mathcal{M}(\mathscr{E})} \times \cdots \times \sigma_n^{\mathcal{M}(\mathscr{E})} \to \tau^{\mathcal{M}(\mathscr{E})}$ 全体の集合。
- 関数記号 $f : \sigma_1, \ldots, \sigma_n \to \tau$ に対し、$f^{\mathcal{M}(\mathscr{E})} = f$
- $\mathbb{L}(\mathscr{E})$ の公理の集合は $\mathcal{M}(\mathscr{E})$ が満たす閉論理式全体の集合。

$\mathbb{L}(\mathscr{E})$ は $\mathscr{E}$ の**内部言語** (internal language) と呼ばれ、$\mathcal{M}(\mathscr{E})$ をその標準的モデルと呼ぶ。

定理 23. $\mathscr{E}$ をトポス、$(\Phi \vdash_X \varphi)$ を $\mathbb{L}(\mathscr{E})$ のシーケントとする。次は同値。

1. $(\Phi \vdash_X \varphi)$ が $\mathbb{L}(\mathscr{E})$ で導出可能。
2. $\mathcal{M}(\mathscr{E})$ が $(\Phi \vdash_X \varphi)$ を満たす。

証明. 1 から 2 は健全性そのもの。2 から 1 は推論

$$\frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\{x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_m^{\sigma_m}\}} \varphi}{\vdash_{\{\}} \forall_{x_1:\sigma_1} \ldots \forall_{x_m:\sigma_m} \varphi_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \varphi_n \Rightarrow \varphi}$$

と

$$\frac{\vdash_{\{\}} \forall_{x_1:\sigma_1} \ldots \forall_{x_m:\sigma_m} \varphi_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \varphi_n \Rightarrow \varphi}{\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\{x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_m^{\sigma_m}\}} \varphi}$$

が $\mathbb{L}(\mathscr{E})$ で妥当であることを使って示せる。 □

定義 24. $\mathbb{L}(\mathscr{E})$ の閉論理式 φ に対し、$\mathcal{M}(\mathscr{E})$ がシーケント $(\vdash_{\{\}} \varphi)$ を満たすとき $\mathscr{E} \models \varphi$ と書く。定理 23 より、これは $(\vdash_{\{\}} \varphi)$ が $\mathbb{L}(\mathscr{E})$ で導出可能なことと同値である。

以下で、トポスの内部言語の基本的な性質を見る。まず最初に、内部言語での等しさと実際の等しさが一致することを示す。

命題 25. $\mathscr{E}$ の射 $f, g : A \to B$ に対し、次は同値。

1. $f = g$
2. $\mathscr{E} \models \forall_{x:A} f(x) =_B g(x)$

証明. 1 から 2 は自明。$\mathscr{E} \models \forall_{x:A} f(x) =_B g(x)$ と仮定する。すると $\mathbb{L}(\mathscr{E})$ で $\vdash_{\{x^A\}} f(x) =_B g(x)$ が導出可能。健全性より図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & 1 \arrow[d, "\top"] \\ A \arrow[r, "(f,g)"'] & B \times B \arrow[r, "=_B"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

が可換になるが、これは $f = g$ ということに他ならない。 □

次の命題は、射がモノであることと内部言語で単射であることが同値であることを意味する。似たような話で、射がエピであることと内部言語で全射であることも同値であるが、今回は省略する。

命題 26. $\mathscr{E}$ の射 $f : A \to B$ に対し、次は同値。

1. f はモノ。
2. $\mathscr{E} \models \forall_{x:A}\forall_{y:A} f(x) =_B f(y) \Rightarrow x =_A y$

証明. $\mathscr{E} \models \forall_{x:A}\forall_{y:A} f(x) =_B f(y) \Rightarrow x =_A y$ が成り立つことは、シーケント $(f(x) =_B f(y) \vdash_{\{x^A, y^A\}} x =_A y)$ が $\mathbb{L}(\mathscr{E})$ で導出可能なことと同値である。シーケント $(x =_A y \vdash_{\{x^A, y^A\}} f(x) =_B f(y))$ は常に導出可能であるから、これは可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta"'] & B \arrow[d, "\Delta"] \\ A \times A \arrow[r, "f \times f"'] & B \times B \end{tikzcd}$$

が引き戻しであることと同値であり、つまり f がモノであることと同値である。 □

命題 27. $f : A \to B$ を $\mathscr{E}$ の射、$m : P \rightarrowtail B$ をモノ射とする。次は同値。

1. $m \circ g = f$ となるような射 $g : A \to P$ が存在する。
2. $\mathscr{E} \models \forall_{x:A}\exists_{z:P} m(z) =_B f(x)$

証明. $m \circ g = f$ となるような射 $g : A \to P$ が存在したとすると、$\mathscr{E} \models \forall_{x:A} m(g(x)) =_B f(x)$ が成り立つのでよい。逆に $\mathscr{E} \models \forall_{x:A}\exists_{y:B} m(z) =_B f(x)$ を仮定する。χ_P を部分対象 $P \rightarrowtail B$ の特性射として、$\chi_P \circ f = \top$ を示せばよい。定義より $\chi_P \circ m = \top$ なので $\mathbb{L}(\mathscr{E})$ で $(\ \vdash_{\{z^P\}} \chi_P(m(z)) =_\Omega \top)$ が導出可能。よって $(m(z) =_B f(x) \vdash_{\{x^A, z^P\}} \chi_P(f(x)) =_\Omega \top)$ も導出可能。よって $(\exists_{z:P} m(z) =_B f(x) \vdash_{\{x^A\}} \chi_P(f(x)) =_\Omega \top)$ も導出可能。仮定より $\vdash_{\{x^A\}} \exists_{z:P} m(z) =_B f(x)$ が導出可能なので $\vdash_{x^A} \chi_P(f(x)) =_\Omega \top$ は導出可能。命題 25 より $\chi_P \circ f = \top$ となる。 □

系 28. $m : P \rightarrowtail B$ を $\mathscr{E}$ のモノ射、$\chi_P : B \to \Omega$ を部分対象 $P \rightarrowtail B$ の特性射とする。$\mathscr{E}$ の対象 A に対して、m を合成することで得られる写像

$$\mathscr{E}(A, P) \to \{f \in \mathscr{E}(A, B) \mid \mathscr{E} \models \forall_{x:A} \chi_P(x)\}$$

は全単射である。

定義 29. $\mathscr{E}$ の対象 A に対し、射 $s_A : A \to \mathrm{P}A$ を $\mathbb{L}(\mathscr{E})$ で

$$s_A(x) := \{y : A \mid x =_A y\}$$

と定義する。

命題 30. $\mathscr{E}$ の対象 A に対し、$s_A : A \to \mathrm{P}A$ はモノ。さらに、$\mathscr{E} \models \forall_{X:\mathrm{P}A}(\exists_{x:A} s_A(x) =_{\mathrm{P}A} X) \Leftrightarrow (\exists!_{x:A} x \in X)$ が成り立つ。

証明. $\mathbb{L}(\mathscr{E})$ でシーケント $(x =_A y \vdash_{\{x^A, y^A, y'^A\}} x =_A y')$ が導出可能なことから s_A がモノであることがわかる。後半は読者の演習問題とする。 □

5 トポスの性質

定理 31. トポス $\mathscr{E}$ はデカルト閉。

証明. A, B を $\mathscr{E}$ の対象とする。射 $\varphi : \mathrm{P}(A \times B) \to \Omega$ を $\varphi(X) := \forall_{x:A}\exists!_{y:B}(x, y) \in X$ で定義し、$B^A := \{\varphi\}$ とする (直観的には、B^A の要素は関係 $R \subset A \times B$ であって任意の $x \in A$ に対して $R(x, y)$ を満たす $y \in B$ がただ一つ存在するもの、つまり A から B への写像)。対象 $C \in \mathscr{E}$ に対し、次の自然な全単射を得る。

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(C, B^A) &\cong \{f \in \mathscr{E}(C, \mathrm{P}(A \times B)) \mid \mathscr{E} \models \forall_{z:C}\forall_{x:A}\exists!_{y:B}(x, y) \in f(z)\} && \text{(系 28)} \\
&\cong \{f \in \mathscr{E}(A \times B \times C, \Omega) \mid \mathscr{E} \models \forall_{z:C}\forall_{x:A}\exists!_{y:B} f(x, y, z)\} && \text{(冪対象の定義)} \\
&\cong \{f \in \mathscr{E}(A \times C, \mathrm{P}B) \mid \mathscr{E} \models \forall_{z:C}\forall_{x:A}\exists!_{y:B} y \in f(x, z)\} && \text{(冪対象の定義)} \\
&\cong \mathscr{E}(A \times C, B) && \text{(命題 30 と系 28)}
\end{aligned}$$

□

定理 32 (トポスの基本定理)**.** $\mathscr{E}$ をトポス、A を $\mathscr{E}$ の対象とする。スライス圏 $\mathscr{E}/A$ はトポスである。

証明. $\mathscr{E}$ は有限極限を持つのでそのスライス $\mathscr{E}/A$ も有限極限を持つ。$\mathscr{E}/A$ の部分対象分類子は対象 $(\Omega \times A \to A) \in \mathscr{E}/A$ とモノ射 $\top \times A : A \cong 1 \times A \to \Omega \times A$ で与えられる。$f : B \to A$ を $\mathscr{E}/A$ の対象とする。$\mathscr{E}/A$ での冪対象 $\mathrm{P}_A B$ を次のように定義する。$\mathscr{E}$ の射 $\varphi : A \times \mathrm{P}B \to \Omega$ を $\varphi(x, Y) := \forall_{y:B} y \in Y \Rightarrow f(y) =_A x$ で定義し、$\mathrm{P}_A B := \{\varphi\}$ とする。射影との合成 $\mathrm{P}_A B \rightarrowtail A \times \mathrm{P}B \to A$ によって $\mathrm{P}_A B$ を $\mathscr{E}/A$ の対象とみなす (直観的には、$\mathrm{P}_A B$ の $x \in A$ でのファイバーはファイバー B_x の冪集合)。$\mathscr{E}/A$ の対象 $g : C \to A$ に対し、次の自然な全単射を得る。

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}/A(C, \mathrm{P}_A B) &\cong \{h \in \mathscr{E}(C, \mathrm{P}B) \mid \mathscr{E} \models \forall_{z:C}\forall_{y:B} y \in h(z) \Rightarrow f(y) =_A g(z)\} && \text{(系 28)} \\
&\cong \{h \in \mathscr{E}(B \times C, \Omega) \mid \mathscr{E} \models \forall_{z:C}\forall_{y:B} h(y, z) \Rightarrow f(y) =_A g(z)\} && \text{(冪対象の定義)} \\
&\cong \{Q \in \mathrm{Sub}_{\mathscr{E}}(B \times C) \mid Q \leq B \times_A C\} && (\text{☆}) \\
&\cong \mathrm{Sub}_{\mathscr{E}}(B \times_A C) \\
&\cong \mathrm{Sub}_{\mathscr{E}/A}(B \times_A C) \\
&\cong \mathscr{E}/A(B \times_A C, \Omega \times A)
\end{aligned}$$

☆の同型は、部分対象 $B \times_A C \rightarrowtail B \times C$ の特性射が $\chi_{B \times_A C}(y, z) = (f(y) =_A g(z))$ で与えられることによる。 □

6　おわりに

トポスの内部言語を導入し、トポスのいくつかの性質を内部言語を使って証明した。しかし、これはトポスと高階論理のほんの一側面でしかない。いくつか関連する項目を挙げるが、詳しいことは [MLM92, LS86, Joh02b] あたりを読みましょう。まず、*Kripke-Joyal semantics* と呼ばれる、トポスの内部言語のより詳細な意味論があり、さらにその特別な場合として *sheaf semantics* がある。これらの意味論は直観主義論理の Kripke 意味論 [Kri65] の高階版とも言えるものである。また、Cohen の強制法 [Coh63, Coh64, Kun11] とも著しい類似があり、実際に連続体仮説 (のトポス的な定式化) を満たさないトポスを構成できる。

トポス意味論は連続体仮説に限らず高階論理の命題の無矛盾性や独立性の証明に使われる。中でも *realizability topos*[vO08] を使うと構成的数学に関する興味深い命題の無矛盾性が示される。例えば *Church's Thesis* は「すべての関数 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ は計算可能である」という命題であるが、*effective topos*[Hyl82] はこれを満たす。

内部言語はトポスから作られた高階理論であるが、逆に高階理論から *syntactic category* と呼ばれるトポスを作ることができる。論理式が高階論理で証明可能なことと syntactic category によって満たされることが同値であることを示すことで、トポス意味論の完全性が示される。また、高階理論のトポスでのモデルと、syntactic category からの構造を保つ関手が対応する。応用の一つとして、*Freyd cover* または *gluing* と呼ばれるトポスを構成することで高階の直観主義論理の *disjunction property* や *existence property* が示される。

トポスに関連する論理は高階論理だけではない。*Grothendieck topos* に対しては *geometric logic* が相性の良い論理であり、こちらのトピックついてはぴあのん氏が詳しく解説してくれるでしょう [ぴ 18]。また、トポスは locally cartesian closed なので**依存型理論**のモデルにもなる [See84]。依存型理論は単純型理論に比べてフォーマルな意味論を与えるのは労力がかかるが非常に表現力の高い言語である。これは自分の研究分野の紹介ですが、cubical type theory のモデルを構成するのにトポスの内部言語としての依存型理論が効果的に使われている [OP16]。

高階論理の意味論もトポスだけではなく、*Grothendieck fibration* を使った意味論もある [Jac99, Section 5]。Grothendieck fibration は高階論理に限らず広く述語論理や型理論の意味論に使われ、トポス意味論はその特別な場合ともいえる。

参考文献

[Coh63] Paul J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 50(6):1143–1148, 1963.

[Coh64] Paul J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis, II. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 51(1):105–110, 1964.

[Hyl82] J.M.E. Hyland. The Effective Topos. In A.S. Troelstra and D. van Dalen, editors, *The L. E. J. Brouwer Centenary Symposium*, volume 110 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, pages 165 – 216. Elsevier, 1982. doi:10.1016/S0049-237X(09)70129-6.

[Jac99] Bart Jacobs. *Categorical Logic and Type Theory*. Elsevier Science, 1st edition, 1999.

[Joh02a] Peter T. Johnstone. *Sketches of an Elephant : A Topos Theory Compendium Volume 1*, volume 43 of *Oxford Logic Guides*. Oxford University Press, 2002.

[Joh02b] Peter T. Johnstone. *Sketches of an Elephant : A Topos Theory Compendium Volume 2*, volume 44 of *Oxford Logic Guides*. Oxford University Press, 2002.

[Kri65] Saul A. Kripke. Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I. In J.N. Crossley and M.A.E. Dummett, editors, *Formal Systems and Recursive Functions*, volume 40 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, pages 92 – 130. Elsevier, 1965. `doi:10.1016/S0049-237X(08)71685-9`.

[Kun11] Kenneth Kunen. *Set Theory*. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations. College Publications, 2011.

[LS86] Joachim Lambek and P. J. Scott. *Introduction to Higher Order Categorical Logic*. Cambridge University Press, 1986.

[MLM92] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer New York, New York, NY, 1992. `doi:10.1007/978-1-4612-0927-0`.

[OP16] Ian Orton and Andrew M. Pitts. Axioms for Modelling Cubical Type Theory in a Topos. In Jean-Marc Talbot and Laurent Regnier, editors, *25th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL 2016)*, volume 62 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 24:1–24:19, Dagstuhl, Germany, 2016. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik. `doi:10.4230/LIPIcs.CSL.2016.24`.

[See84] R. A. G. Seely. Locally cartesian closed categories and type theory. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 95(1):33–48, 1984. `doi:10.1017/S0305004100061284`.

[vO08] Jaap van Oosten. *Realizability: An Introduction to Its Categorical Side*, volume 152 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Elsevier Science, San Diego, USA, 2008.

[ぴ 18] ぴあのん, 2018. Category Theory Advent Calendar 2018 (`https://adventar.org/calendars/3168`) の 25 日目の記事.